Dossier n°56 : Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 6 décembre 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

En classe de Première S, les élèves étudient quelques exemples de recherche de solutions approchées d'équations de la forme f(x) = 0 par la méthode de balayage.

En Terminale S, on énonce aux élèves le théorème des valeurs intermédiaires et on approche les solutions d'une équation de la forme f(x) = k par dichotomie et balayage. Les élèves étudient également quelques exemples d'approximation de points fixes de fonctions à l'aide de suites récurrentes.

Je choisis donc de situer ce dossier en Terminale S.

II Commentaires généraux.

Le but de ce dossier est d'approcher par diverses méthodes et techniques de calcul, la ou les solutions d'une équation de la forme f(x) = 0.

Il convient bien sûr de considérer une équation dont les solutions ne sont pas triviales (équations du premier ou de second degré).

Pour cela, on se restreint, pour chacune des solutions de l'équation à un intervalle [a ;b] sur lequel l'équation ne possède qu'une unique solution α.

Pour vérifier que l'équation considérée admet une solution sur l'intervalle [a ;b], on utilise le théorème suivant, énoncé en terminale S :

Si f est continue et strictement monotone sur [a ;b] et si f(a)f(b) < 0 alors l'équation f(x) = 0 a une unique solution dans [a ;b].

On souhaite ensuite approcher α avec une précision donnée.

La première méthode enseignée aux élèves est celle du balayage, en Première S.

Méthode de balayage :

L'idée est d'examiner une table de valeurs de la fonction f sur l'intervalle [a ;b] avec un pas égal à la précision souhaitée (noté h).

On peut alors trouver deux valeurs consécutives x_0 et x_1 avec $x_1 = x_0 + h$ et $f(x_0)f(x_1) < 0$.

On obtient alors un encadrement d'amplitude h de α :

$$x_0 < \alpha < x_1$$

J'ai choisi de vous présenter dans ce dossier deux autres méthodes d'approximation : la méthode de dichotomie et la méthode des tangentes.

Méthode de dichotomie :

On partage l'intervalle [a ;b] en deux intervalles de même longueur et on cherche celui de ces deux intervalle qui contient α :

- Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(a) > 0$ c'est-à-dire si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et f(a) sont de même signe alors α n'est pas dans $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$.

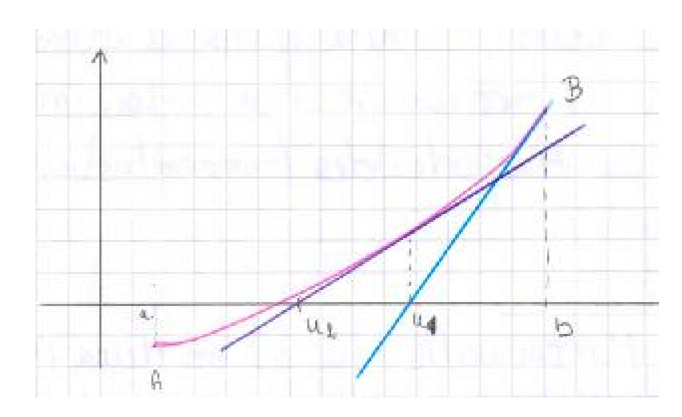
- Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(a) < 0$ c'est à dire si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et f(a) sont de signe contraire alors α est dans $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$.
- Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(a) = 0$ et $f(a) \neq 0$ alors $\alpha = \frac{a+b}{2}$.

On recommence sur l'intervalle obtenu jusqu'à obtenir un intervalle dont la longueur correspond à l'amplitude de l'encadrement souhaitée.

Méthode des tangentes :

Elle consiste à construire une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par $u_0 = b$ et, pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} = g(u_n)$ où $g : x \to x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ sous l'hypothèse que f' ne s'annule pas sur [a ;b].

La construction de cette suite est issue de celle des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f : l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point M(x ;f(x)) où $x \in$ (a ;b) est g(x).



On peut alors montrer que α est l'unique point fixe de g sur [a ;b], que g est contractante et par suite, il existe un réel $k \in]0\,;1[$ tel que pour tout $n \in$ IN,

$$| u_{n+1}-\alpha| \leq k^n | u_n - \alpha|$$

La suite $(u_n)_n$ converge donc vers α.

III Présentation de l'exercice.

But : il s'agit d'approcher à 10^{-8} près l'unique solution de l'équation $x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ dans [0 ;1].

III.1 Préliminaires.

On montre tout d'abord, à l'aide du théorème énoncé précédemment, que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans (0 ;1] avec $f : x \to x^3 + 3x^2 + 2x - 1$.

A l'aide d'un balayage à la calculatrice, on montre que $\alpha \in]0,3\,;0,4[$. On note I =]0,3 ;0,4[.

III.2 Approximation par dichotomie.

On construit, par la méthode de dichotomie, deux suites, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, où , pour tout $n \in$ IN :

- $a_n, b_n \in$ I ;
- $a_n \leq \alpha \leq b_n$;

- $b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \times 0{,}1$.

On peut alors montrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.

Définition :

On dit que deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes lorsque $(u_n)_n$ est croissante, $(v_n)_n$ est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Proposition :

Si deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite l. De plus, $u_n \leq l \leq v_n$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \alpha$.

Pour $n_0 = 24$, on, obtient un encadrement d'amplitude 10^{-8} de α.

$a_{24} \approx 0{,}324717956781$

$b_{24} \approx 0{,}324717962742$

III.3 Approximation par la méthode des tangentes.

On approche α à l'aide de la suite $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = T(u_n) \end{cases}$ où $T : x \to x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Alors f(x) = 0 signifie que T(x) = x.

On montre que, pour tout x dans I, $T'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ et sous réserve de la monotonie sur I de f, f' et f'', on a :

$$\forall x \in I, |T'(x)| \leq \frac{f(0{,}4)f''(0{,}4)}{f'(0{,}3)^2} \text{ où } \frac{f(0{,}4)f''(0{,}4)}{f'(0{,}3)^2} < 0{,}2.$$

Inégalité de la moyenne :

Si, pour tout x de [a ;b], $|f(x)| \leq M$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$ où $a \leq b$ et f continue sur [a ;b].

On déduire de l'inégalité de la moyenne appliquée à T' et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq 0{,}2^n \times 0{,}1$.

Pour $n_1 = 11$, on obtient une valeur approchée à 10^{-8} près de α :

$u_{11} \approx 0{,}324717957245$

IV Enoncé de l'exercice (TP4 p 75, Fractale TS 1998).

On se propose d'approcher une racine de l'équation f(x) = 0 avec f : $x \to x^3 + 3x^2 + 2x - 1$.

0) Préliminaires

1. En montrant que f est dérivable et strictement monotone sur [0 ;1], prouver que l'équation $x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une unique solution, notée α dans]0 ;1[.
2. A l'aide d'un balayage sur la calculatrice, montrer que $\alpha \in]0,3 ;0,4[$.

I) Approximation par dichotomie.

On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $a_0 = 0,3$; $b_0 = 0,4$ et construites de la manière suivante, pour tout entier naturel n :

- Si $f(a_n) = 0$ alors $\alpha = a_n$ et on arrête ;
- Si $f(b_n) = 0$ alors $\alpha = b_n$ et on arrête ;
- Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)f(a_n) > 0$ alors $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$;
- Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)f(a_n) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$;
- Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)f(a_n) = 0$ et $f(a_n) \neq 0$ alors $\alpha = \frac{a_n + b_n}{2}$ et on arrête.

1. Montrer que pour tout $n \in$ IN, a_n et b_n appartiennent à I =]0,3 ;0,4[.
2. Montrer que pour tout $n \in$ IN, $a_n \leq \alpha \leq b_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in$ IN, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ et en déduire que $b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \times 0,1$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \alpha$.
4. Déterminer un entier n_0 tel que , pour tout $n \geq n_0$, $|b_n - a_n| \leq 10^{-8}$. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-8}.

I) Approximation de α par la méthode des tangentes.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f, A le point de coordonnées (0,3 ;f(0,3)) et B le point de coordonnées (0,4 ;f(0,4)).

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente en B à la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
2. Soit T : $\to x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ avec $x \in [0,3 ;0,4]$. Calculer T(0,4). Que constate-t-on ?
3. Soit M(x ;f(x)) où $x \in [0,3 ;0,4]$. Montrer que T(x) est l'abscisse du point d'intersection de la tangente en M à $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
4. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0,4$ et $u_{n+1} = T(u_n)$ pour tout $n \in$ IN. Construire u_1, u_2 et u_3 sur le graphique.
5. Montrer que f(x) = 0 équivaut à T(x) = x.
6. Montrer que $T(I) \subset I$ où I = [0,3 ;0,4]. En déduire que pour tout $n \in$ IN, $u_n \in I$.
7. Montrer que, pour tout $x \in I$, $|T'(x)| < 0,2$.
8. En déduire que, pour tout $n \in$ IN, $|u_{n+1}-\alpha| \leq 0,2|u_n - \alpha|$ puis que, $|u_n - \alpha| \leq 0,2^n \times 0,1$.
9. Déterminer un entier n_1 tel que , pour tout $n \geq n_1$, $|u_n - \alpha| \leq 10^{-8}$. En déduire une valeur approchée à 10+-8= près de α.